

KESTABILAN MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN BENTUK LESLIE-GOWER STRUKTUR PADA MANGSA

Nurani Natsir

Politeknik Maritim AMI Makassar
e-mail: nayaanatsir@gmail.com

Abstrak

Seiring dengan perkembangan teknologi yang begitu pesat maka perkembangan pengetahuan tentang sistem dinamik juga berkembang pesat. Penelitian ini bertujuan menemukan kestabilan model mangsa pemangsa dengan bentuk Leslie-Gower dengan tahapan struktur pada mangsa. Permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana menurunkan model matematika dari modifikasi sistem mangsa pemangsa Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling Tipe II; bagaimana menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan pada modifikasi model mangsa pemangsa Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling Tipe II; bagaimana pengaruh parameter terhadap keadaan yang sebenarnya dari modifikasi model mangsa pemangsa Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling Tipe II; dan bagaimana simulasi numerik dari modifikasi model mangsa pemangsa Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling Tipe II menggunakan *software Maple*. Metode yang digunakan untuk menganalisis masalah adalah dengan studi pustaka. Langkah-langkah yang digunakan adalah menurunkan model matematika dari modifikasi sistem mangsa pemangsa Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling Tipe II, menentukan semua titik tetap, menentukan persamaan karakteristik dan nilai eigen dari matriks jacobian, menentukan nilai parameter terjadinya bifurkasi Holf, menghitung syarat transversal, membuat simulasi numerik dari modifikasi model mangsa pemangsa Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling Tipe II menggunakan *software Maple* dan menyimpulkan. Hasil penelitian memperlihatkan model yang diperoleh adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left(r_1 - \frac{c_1 y}{x + k_1} - \frac{c_2 z}{x + k_2} - b_1 x \right) x \\ \frac{dy}{dt} &= \left(r_2 - \frac{c_3 y}{x + k_3} \right) y - \alpha_1 y z \\ \frac{dz}{dt} &= \left(r_3 - \frac{c_4 y}{x + k_4} \right) z + \alpha_2 y z\end{aligned}$$

Kata Kunci: Analisis Dinamik Kontinu, Model Mangsa Pemangsa *Leslie-Gower*, Fungsi Respon holling Tipe II.

Abstract

Along with the development of technology so rapidly the development of knowledge about dynamic systems is also growing rapidly. This aims to study find out the stability of prey-predator model using Leslie-Gower from with stages of structure on prey. Issues raised in the research are how to generate a mathematical model of the modification of Leslie-Gower prey-predator system with the response function of Holling type II; how to determine the point of equilibrium and stability analysis on a modified model of Leslie-Gower prey-predator with the response function of Holling type II; the effects of changes in the parameters on the actual state of the modification of Leslie-Gower prey-predator model with the response function of Holling type II; and the numerical simulation of the modification of Leslie-Gower prey-predator model with the response function of Holling type II using the maple software. The problem was analysed based on a literature review. The steps used were: generating a mathematical model from the modification of Leslie-Gower prey-predator model with the response function of Holling

type II; determine all fixed point; determine a cracteristic equation and the eigen value of jacobian matriks; determine in the value of the parameter of Hoft bifurcation; calculate the transversal angles; createa numerical simulation of the modification of Leslie-Gower prey-predator model with the response function of Holling type II using the software Maple; and drawing the conclusion. The results of the research show a model as follows:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left(r_1 - \frac{c_1 y}{x + k_1} - \frac{c_2 z}{x + k_2} - b_1 x \right) x \\ \frac{dy}{dt} &= \left(r_2 - \frac{c_3 y}{x + k_3} \right) y - \alpha_1 y z \\ \frac{dz}{dt} &= \left(r_3 - \frac{c_4 y}{x + k_4} \right) z + \alpha_2 y z\end{aligned}$$

Keywords: Continuous Dynamic Analysis, Model Leslie-Gower Prey-Predator, Response Function of Holling type II.

1. Pendahuluan

Seiring dengan perkembangan teknologi yang begitu pesat maka perkembangan pengetahuan tentang sistem dinamik juga berkembang pesat. Sebagai contoh pengembangan sistem dinamik dalam kehidupan adalah pada bidang ekologi dalam cabang biologi yang mempelajari ekosistem. Salah satu model yang merupakan sistem dinamika dalam bidang ini adalah model interaksi populasi yaitu interaksi antara dua spesies atau lebih, interaksi ini dapat berbentuk predasi, hubungan predasi terjadi jika satu organisme pemangsa memangsa organisme lain (*mangsa*).

Salah satu contoh model interaksi populasi adalah model sistem mangsa pemangsa, karena model ini mempunyai peranan yang penting dalam perputaran dinamika populasi, maka hal ini merupakan sesuatu yang sangat menarik untuk dipelajari. Model pemangsa mangsa dipelajari secara matematika sejak dimodelkan persamaan *Lotka-Volterra*. Sebuah asumsi dasar model pemangsa mangsa dikemukakan *Lotka-volterra*, bahwa masing-masing spesies mengalami pertumbuhan secara eksponen, pengembangan model ini menginvestigasi pertumbuhan logistik satu spesies ketika spesies yang lain tidak ada.

Penelitian ini bertujuan menentukan model mangsa pemangsa dengan bentuk Leslie-Gower dan tahapan struktur pada mangsa, dan menentukan kestabilan titik kesetimbangan nonnegatif model mangsa pemangsa dengan bentuk Leslie-Gower dan tahapan struktur pada mangsa.

Model dasar pemangsa mangsa *Lotka-volterra* dimodifikasi oleh banyak ilmuwan. Salah satu modifikasi model dasar pemangsa mangsa *Lotka-volterra* dengan perbandingan/rasio antara populasi pemangsa dan populasi mangsa mempengaruhi pertumbuhan populasi pemangsa yang tumbuh mengikuti model logistik selain itu, laju pertumbuhan pemangsa sebanding dengan banyaknya populasi mangsa [6]. Adapun model pertumbuhan logistik yang merupakan model pertumbuhan populasi dengan kapasitas daya tampung (*carrying capacity*).

Kapasitas daya tampung merupakan batas atas yang dapat dicapai oleh ukuran populasi, di mana jumlah populasi itu tidak lagi dapat didukung oleh sarana, sumberdaya, dan lingkungan yang ada [5]. Keterbatasan dan Stabilitas Global untuk Model Predator-Prey dengan Dimodifikasi Skema Leslie-Gower dan Holling-Type II [1].

Adapun dalam kasus tidak tersirat baik secara implisit maupun eksplisit memuat waktu tunda, hal ini merupakan aspek yang dapat menimbulkan kelemahan-kelemahan dalam proses analisis baik dari segi akurasi maupun perilaku sistem. Karena kestabilan suatu sistem interaksi populasi secara signifikan dipengaruhi oleh keberadaan waktu tunda, waktu tunda sering muncul dalam setiap situasi. Kemudian model mangsa pemangsa Lotka-Volterra di modifikasi oleh Olinick [8] dengan menambahkan asumsi bahwa jumlah populasi juga dipengaruhi oleh adanya tingkat kompetisi di dalam populasi tersebut.

Beberapa penelitian terdahulu yang mendasari penelitian ini, antara lain tentang dinamika dari tahap terstruktur Leslie-Gower mangsa pemangsa Model teori [3]. Model tersebut memiliki empat titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan trivial, titik kesetimbangan kepunahan mangsa, titik kesetimbangan kepunahan pemangsa dan titik kesetimbangan interior. Solusi periodik dari modifikasi Leslie-Gower model Pemangsa-Mangsa dengan Beddington-DeAngelis respon fungsional, Zhimin[11] mempertimbangkan model pemangsa-mangsa dengan modifikasi respon fungsional Leslie-Gower dan Beddington-DeAngelis. Sebagai perbandingan menerapkan teorema dari persamaan diferensial dan membangun fungsi Lyapunov, bahwa kekekalan dan keberadaan solusi periodik yang diperoleh secara global sangat memungkinkan hasil yang positif dari hasil yang diperoleh. Analisis model pemangsa-mangsa dengan dimodifikasi Leslie-Gower dan Holling-tipe II skema dengan waktu tunda Nindjin *et al*(2006). Tiga spesies yang terdiri dari dua pemangsa dan satu pemangsa di habitat homogen dianggap terisolasi. Mangsa diasumsikan tumbuh logistik pemangsa ini dimodifikasi dinamika Leslie-Gower dan pada spesies mangsa menurut Holling Tipe II respon fungsional. Stabilitas lokal bersifat positif konstan dari sistem duniawi yang sesuai Gakkar & Melese[2]. Tujuan penelitian ini adalah menentukan kestabilan titik keseimbangan nonnegatif model mangsa pemangsa dengan bentuk Leslie-Gower dengan tahapan stuktur pada mangsa. Menurut kriteria kestabilan Routh-Hurwitz titik T_5 stabil asimtotik jika dan hanya jika $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$, dan $a_2 a_1 - a_0 > 0$ [4]. Adapun analisis yang menyatakan Perilaku dinamis dalam model predator pemangsa diskrit dengan tempat perlindungan mangsa Zhuang & Wen (2011).

2. METODE

Secara umum, penelitian yang dilakukan yaitu menentukan kestabilan titik keseimbangan nonnegatif model mangsa pemangsa dengan bentuk Leslie-Gower dengan tahapan stuktur pada mangsa, kemudian melakukan simulasi numerik. Adapun metode

penelitiannya adalah menganalisis tingkat kestabilan titik keseimbangan model Leslie-Gower mangsa pemangsa dengan respon holling tipe II, metode linearisasi dan uji Hurwitz. Kemudian software komputasi yang digunakan pada penelitian ini adalah Maple 16.

3. HASIL DAN ANALISIS

Model Leslie-Gower diberikan persamaan diferensial pada persamaan sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = (r_1 - c_1y - c_2z - b_1x)x$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(r_2 - c_3 \frac{y}{x} \right) y - \alpha_1 yz$$

$$\frac{dz}{dt} = \left(r_3 - c_4 \frac{z}{x} \right) z + \alpha_2 yz$$

Titik TE_4 merupakan titik interior jika $x_3 > 0$, $\frac{-x_3(-r_1\alpha_1 + c_2r_2 + b_1x_3\alpha_1)}{(-c_3c_2 + \alpha_1x_3c_1)} > 0$ dan

$\frac{r_2x_3c_1 - c_3r_1 + c_3b_1x_3}{(-c_3c_2 + \alpha_1x_3c_1)} > 0$ yaitu keadaan dimana ketiga komponen titik tersebut bernilai positif.

Pertimbangan model dengan nilai parameter $r_1 = 500$; $r_2 = 2$; $r_3 = 1$; $c_1 = 0,5$; $c_2 = 0,05$; $c_3 = 0,5$; $c_4 = 0,5$; $b_1 = 0,5$; $\alpha_1 = 0,00001$; $\alpha_2 = 0,00000001$. Berdasarkan nilai parameter yang diberikan dan setelah disederhanakan maka diperoleh titik keseimbangan konstan ketiga populasi tersebut $(E_1^*, E_2^*, E_3^*) = (192,5929610; 768,8881506; 385,1888836)$ dengan titik keseimbangan yaitu $\lambda_1 = -87,0498367370994$, $\lambda_2 = -11,2226650418576$, $\lambda_3 = -1,02013450004302$. Nilai-nilai eigen yang diperoleh terlihat bahwa semuanya bernilai negatif. Berdasarkan hal ini, disimpulkan bahwa titik keseimbangan $TE_4^*(x^*, y^*, z^*)$ stabil. Titik keseimbangan $TE_4^*(x^*, y^*, z^*)$ juga dianalisis kestabilannya menggunakan uji kestabilan Hurwitz, dimana diperoleh nilai $P_0 = 2,000030755$, $P_1 = 0,000003851888836$, $P_2 = 7,969214565$ dan $P_2P_1 - P_0 = 2,000000058 > 0$. Karena $P_0 > 0$, $P_1 > 0$, $P_2 > 0$ dan $P_2P_1 - P_0 > 0$, maka menurut uji kestabilan Hurwitz, titik keseimbangan $TE_4^*(x^*, y^*, z^*)$ stabil asimtotik. Hal ini bermakna bahwa jika diambil nilai awal tertentu (misalkan 100) untuk masing-masing populasi, maka dalam waktu yang lama jumlah populasi mangsa zona bebas menuju ke 192,5929610, populasi mangsa zona reservasi menuju ke 768,8881506, populasi pemangsa menuju ke 385,1888836.

Berdasarkan hasil simulasi yang ditunjukkan oleh gambar 1 terlihat bahwa pada gambar 1 (a) laju pertumbuhan prey mulai naik pada waktu t tertentu ini dikarenakan faktor lain tadi mulai menghilang sehingga mangsa akan bertambah. Pada laju pertumbuhan prey terlihat bahwa populasi ini tidak akan mengalami perubahan pada waktu t tertentu. Pada keadaan tersebut,

sistem berada dalam kondisi setimbang. Berdasarkan hasil numerik, populasi prey akan mencapai 20 pada saat t tertentu dan konstan pada titik tersebut. Pada gambar 1 (b) menjelaskan bahwa laju predator I mengalami peningkatan yang sangat drastis. Kenaikan ini disebabkan oleh laju populasi prey yang semakin membaik akhirnya laju populasi predator I meningkat. Tetapi selanjutnya mengalami penurunan tetapi hanya sebagian saja yang diakibatkan oleh adanya pesaing. Predator I ini akan terus turun sampai dimana laju pertumbuhan predator I tidak mengalami perubahan atau dalam keadaan setimbang. Berdasarkan hasil numerik, populasi predator I akan mencapai 20 pada waktu t tertentu dan konstan pada titik tertentu. Gambar 1 (c) menjelaskan bahwa proporsi predator II mengalami naik turun. Kenaikan ini disebabkan keadaan prey yang semakin membaik dan didukung oleh adanya predator I. Tetapi selanjutnya predator II turun sampai titik dimana pergerakan predator II tidak mengalami perubahan atau dalam keadaan setimbang. Penurunan ini dikarenakan lagi karena tidak adanya penambahan dari predator I yang menjadi predator II. Predator II ini akan terus turun sampai dimana laju pertumbuhan predator II tidak mengalami perubahan atau dalam keadaan setimbang. Berdasarkan hasil numerik, populasi sel terinfeksi dalam keadaan setimbang adalah 0 pada waktu t tertentu, artinya predator II akan stabil.

Model Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling tipe II ditunjukkan pada persamaan

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left(r_1 - \frac{c_1 y}{x + k_1} - \frac{c_2 z}{x + k_2} - b_1 x \right) x \\ \frac{dy}{dt} &= \left(r_2 - \frac{c_3 y}{x + k_3} \right) y - \alpha_1 y z \\ \frac{dz}{dt} &= \left(r_3 - \frac{c_4 y}{x + k_4} \right) z + \alpha_2 y z\end{aligned}$$

Titik TE_8 merupakan titik interior jika $\sqrt{x_4} > 0$,
 $(r_2 \sqrt{x_4} c_4 + r_2 k_3 c_4 - \alpha_1 (\sqrt{x_4})^2 r_3 - \alpha_1 \sqrt{x_4} r_3 k_4 - \alpha_1 k_3 r_3 \sqrt{x_4} - \frac{\alpha_1 k_3 r_3 k_4}{c_4 c_3} + (\sqrt{x_4})^2 \alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{x_4} \alpha_1 k_3$
 $+ \alpha_2 k_4 \alpha_1 \sqrt{x_4} + \alpha_2 k_3 k_4 \alpha_1) > 0$ dan $(r_3 \sqrt{x_4} c_3 + r_3 k_4 c_3 + \alpha_2 (\sqrt{x_4})^2 r_2 - \alpha_2 \sqrt{x_4} r_2 k_3 +$
 $\alpha_2 k_4 r_2 \sqrt{x_4} + \frac{\alpha_2 k_3 k_4 r_2}{c_4 c_3} + \alpha_2 (\sqrt{x_4})^2 \alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{x_4} \alpha_1 k_3 + \alpha_2 k_4 \alpha_1 \sqrt{x_4} + \alpha_2 k_3 k_4 \alpha_1) > 0$ yaitu

keadaan dimana ketiga komponen titik tersebut bernilai positif.

Nilai parameter $r_1 = 0,9$; $r_2 = 0,5$; $r_3 = 0,1$; $c_1 = 0,00001$; $c_2 = 0,00005$; $c_3 = 0,1$;
 $c_4 = 0,05$; $b_1 = 0,1$; $\alpha_1 = 0,0000005$; $\alpha_2 = 0,00005$; $k_1 = 500$; $k_2 = 300$; $k_3 = 250$;
 $k_4 = 100$. Berdasarkan nilai parameter yang diberikan dan setelah disederhanakan maka diperoleh titik keseimbangan konstan ketiga populasi tersebut

$(E_1^*, E_2^*, E_3^*) = (8,999164600; 1294,530789; 359,1011037)$ dengan titik keseimbangan yaitu $\lambda_1 = -0,899912361050321$, $\lambda_2 = -0,499786381418206$, dan $\lambda_3 = -0,164762564931474$. Nilai-nilai eigen yang diperoleh terlihat bahwa semuanya bernilai negatif. Berdasarkan hal ini, disimpulkan bahwa titik keseimbangan $TE_8^*(x^*, y^*, z^*)$ stabil. Titik keseimbangan $TE_8^*(x^*, y^*, z^*)$ juga dianalisis kestabilannya menggunakan uji kestabilan Hurwitz, dimana diperoleh nilai $P_0=0,01795505518$, $P_1=0,5426966560$, $P_2=2,498204819$ dan $P_2P_1 - P_1 = 1,3378123461 > 0$. Karena $P_0 > 0$, $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, dan $P_2P_1 - P_1 > 0$, maka menurut uji kestabilan Hurwitz, titik keseimbangan $TE_8^*(x^*, y^*, z^*)$ stabil asimtotik. Hal ini bermakna bahwa jika diambil nilai awal tertentu (misalkan 100) untuk masing-masing populasi, maka dalam waktu yang lama jumlah populasi mangsa zona bebas menuju ke 8,999164600, populasi mangsa zona reservasi menuju ke 1294,530789, populasi pemangsa menuju ke 359,1011037.

Berdasarkan hasil simulasi yang ditunjukkan oleh gambar 2 terlihat bahwa pada gambar 2 (a) menjelaskan bahwa laju pertumbuhan populasi mangsadi atas menjelaskan bahwa ukuran populasi mangsa berfruktusi di awal pengamatan dengan kecendrungan naik hingga mencapai kestabilan. Pada gambar 2 (b) menjelaskan bahwa laju pertumbuhan populasi predator I ukuran populasi pemangsa kedua mengkonsumsi mangsa lebih sedikit sehingga jumlah populasinya agak menurun.

Gambar 2 (c) menjelaskan bahwa di atas menjelaskan bahwa ukuran populasi pemangsa pertamamengkonsumsi mangsa agak banyak sehingga jumlah populasinya meningkat dibandingkan ukuran populasi pemangsa kedua. Berdasarkan ketiga gambar di atas yaitu Gambar 2 (a), Gambar 2 (b) dan Gambar 2 (c) terlihat bahwa ukuran populasi mencapai kestabilan pada waktu $t = 40$. Ketiga gambar di atas dapat dilihat dengan nilai awal $x(t) = 0,427$, $y(t) = 0,229$ dan $z(t) = 0,014$. Selanjutnya akan diperlihatkan titik equilibrium pemanenan positif yaitu $(0,42798519149, 0,2297135427, 0,01483606895)$ stabil asimtot yang terjadi pada permukaan garis.

Penelitian ini menunjukkan bahwa perilaku sistem pada populasi pemangsa II (z) memberikan pengaruh pada populasi yang dipanen yaitu mengalami penurunan dengan jumlah yang signifikan dari nilai awal yang diberikan. Berbeda halnya dengan populasi mangsa pada zona bebas (x) dan populasi mangsa pada zona reservasi (y) yang mengalami pertumbuhan yang cukup signifikan.

Suatu metode dipertimbangkan untuk menguji kestabilan titik kesetimbangan dari sistem dinamik linier dengan koefisien konstan ,

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

Dengan x adalah matriks berukuran nx1 dan A adalah matriks berukuran nxn.

Dari teorema dasar aljabar menyatakan bahwa suatu polinomial

$$f(r) = r^n + P_{n-1}r^{n-1} + \dots + P_2r^2 + P_1r + P_0$$

dengan $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ adalah konstanta real, mempunyai n akar, r_1, r_2, \dots, r_n . Masing-masing akar bernilai real atau mungkin bernilai kompleks yang memenuhi $f(r_i) = 0$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Dengan perkataan lain berlaku

$$f(r) = (r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n)$$

nilai eigen dari matriks A merupakan akar-akar dari polinomial $f(r)$.

Uji kestabilan Hurwitz untuk titik kesetimbangan $O = (0, 0, \dots, 0)$ pada sistem (2.21) tidak melibatkan perhitungan nilai eigen dari matriks A . Uji kestabilan Hurwitz menguji determinan dari matriks H_n yang disebut matriks Hurwitz. Entry-entry matriks Hurwitz nilainya hanya memuat $0, 1, P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$. Matriks Hurwitz diberikan sebagai berikut:

$$H_1 = (P_{n-1})$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-3} \\ 1 & P_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-3} & P_{n-5} \\ 1 & P_{n-2} & P_{n-4} \\ 0 & P_{n-1} & P_{n-3} \end{pmatrix}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-3} & P_{n-5} & P_{n-7} \\ 1 & P_{n-2} & P_{n-4} & P_{n-6} \\ 0 & P_{n-1} & P_{n-3} & P_{n-5} \\ 0 & 1 & P_{n-2} & P_{n-4} \end{pmatrix}$$

Sampai matriks H_n . Disini, nilai p_j didefinisikan bernilai 0 jika j bernilai negatif.

Misalkan sistem dinamik mempunyai trajektori konstan $\mathbf{0}$. Setiap matriks Hurwitz mempunyai determinan dengan nilai positif jika dan hanya jika setiap bagian rill dari nilai eigen matriks A bernilai negatif dan $\mathbf{0}$ merupakan suatu trajektori atraktor, yaitu titik kesetimbangan stabil asimtotik.

Untuk nilai n yang kecil, uji stabilan Hurwitz menyatakan bahwa masing-masing matriks Hurwitz mempunyai determinan dengan nilai positif jika dan hanya jika, untuk

$$n = 1, P_0 > 0;$$

$$n = 2, P_0, P_1 > 0;$$

$$n = 3, P_0, P_1, P_2 > 0, P_2P_1 - P_0 > 0;$$

$$n = 4, P_0, P_1, P_2, P_3 > 0, P_3 P_2 P_1 - P_1^2 - P_0 P_3^2 > 0$$

Dengan demikian kestabilan titik kesetimbangan 0 dapat diketahui dengan memperhatikan nilai-nilai koefisien dari persamaan karakteristik matriks A [9].

4. KESIMPULAN DAN SARAN

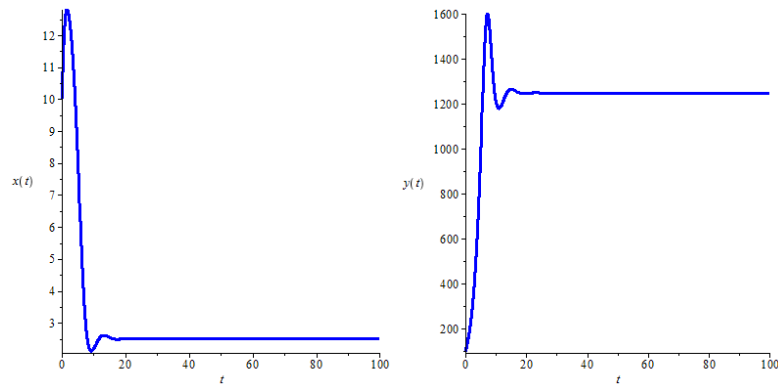
Hasil penelitian model Leslie-Gower mangsa pemangsa memberikan hasil yaitu diperoleh empat titik keseimbangan yang salah satunya merupakan titik keseimbangan interior dan mempunyai sifat kestabilan stabil asimtotik. Hal ini bermakna bahwa mangsa (x), mangsa zona reservasi (y), dan pemangsa (z) memberikan keuntungan pada ketiga populasi tersebut. Hasil penelitian respon holling tipe II pun demikian memberikan hasil yaitu diperoleh delapan titik keseimbangan yang salah satunya merupakan titik interior dan mempunyai sifat kestabilan stabil asimtotik. Diharapkan pada penelitian berikutnya, agar mengembangkan model dengan menambahkan beberapa asumsi-asumsi khusus dan dapat mencoba menggunakan fungsi respon dengan tipe yang lain contohnya, tipe III untuk melihat perubahan dinamika populasi organisme.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Aziz. Muh and Okiye Daher(2003). Boundedness and Global Stability for a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes. *Applied Mathematics Letters* 16 (1069-1075). France
- [2] Gakkar S. & Melese D.(2011). Non-constant Positive Steady State of a Diffusive Leslie-Gower Type Food Web System. *Journal of Applied Analysis and Computation*. 1: 467-485.
- [3] Huo H. F., Wang X., & Chavez C. C. (2011). Dynamics of a Stage Structured Leslie-Gower Prey Predator Model. *Hindawi Publishing Corporation*. 1 - 22.
- [4] Jeffries C. (1989). *Mathematical Modeling in Ecology*. Birakhauser, Boston.
- [5] Leslie P. H. & Gower C. J.(1960). The properties of a stochastic model for the Prey Predator type of interaction between two species. *Biometrika Journal*. 47: 219 - 234.
- [6] Leslie P. H.(1948).Some further notes on the use of matrices in population mathematics. *Biometrika* 33: 183-212.
- [7] Nindjin A. F., Aziz-Alaoui M. A., & Cadivel M. (2006). Analysis of a Prey Predator model with modified Leslie-Gower and Holling type II schemes with time delay. *Real World Applications*. 7: 1104-1118.
- [8] Olinick M. (2006). Modeling the Predator-Prey Relationship. MAA Session on Environmental Mathematics.
- [9] Toaha S.(2013). *Pemodelan Matematika dalam Dinamika Populasi*. Dua Satu Press, Makassar.
- [10] Zhuang K. &WenZ.(2011). Dynamical Behaviors in a Discrete Prey Predator Model with a Mangsa Refuge. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. 5: 195 - 197.
- [11] Zhimin Z.(2013). Almost periodic solution of a modified Leslie-Gower Prey Predator model with Beddington-DeAngelis functional response. *Journal of applied mathematics*. 1 - 10.

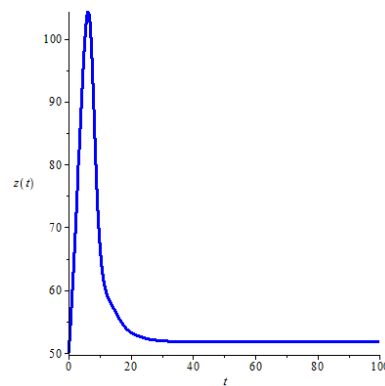
LAMPIRAN 1.

Berdasarkan simulasi numerik pada model Leslie-Gower mangsa pemangsa diperoleh dengan menggunakan Aplikasi Maple 16.



a

b

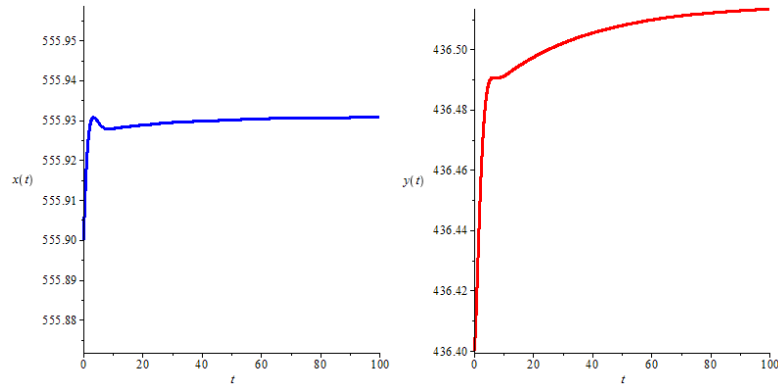
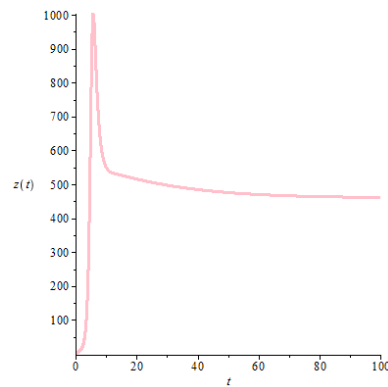


c

Gambar 1. Laju pertumbuhan populasi (a) **prey**(x), (b) **pemangsa I**(y), (c) **pemangsa II**(z)

LAMPIRAN 2.

Berdasarkan simulasi numerik pada model matematika dengan Respon Holling tipe II diperoleh dengan menggunakan Aplikasi Maple 16.

**a****b****c**

Gambar2. Laju pertumbuhan populasi (a) **prey** (x), (b) **pemangsa I** (y), (c) **pemangsa II** (z)